

TEOREMA DEL PARAMETRO

Consideriamo una funzione di k variabili:

$$\Phi^{(k)}(x_1, \dots, x_k, y)$$

(y non è una variabile ordinaria ma il numero di codice del programma)

Esistono delle situazioni nelle quali noi siamo esplicitamente interessati alla dipendenza funzionale da una sola variabile o da un sottogruppo delle k variabili.

In questo caso ci piacerebbe presentare la $\Phi^{(k)}$ come funzione, ad es., di una sola variabile calcolata da un programma opportuno.

Questo programma dovrebbe essere ottenibile, in modo calcolabile, a partire dal programma che calcola $\Phi^{(k)}$ e dalle variabili che non si vogliono considerare.

Il cosiddetto teorema del parametro, o teorema di iterazione o teorema S-U-N, afferma non solo che il desiderio espresso prima è realizzabile ma anche che la funzione che ci fornisce il numero del nuovo programma è ricorsiva primitiva.

TEOREMA

Per ciascun $n, m > 0$ esiste una funzione ricorsiva primitiva $S_m^n(u_1, u_2, \dots, u_n, y)$ tale che

$$\Phi^{(m+n)}(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n, y) = \Phi^{(m)}(x_1, \dots, x_m, \underbrace{S_m^n(u_1, \dots, u_n, y)}_{\text{codice del programma}})$$

L
codice del programma

L
codice del programma

Dimostrazione.

La dimostrazione è per induzione su n .

Per $n=1$ dobbiamo mostrare che esiste una funzione ricorsiva primitiva $S_m^1(u, y)$ tale che:

$$\Phi^{(m+1)}(x_1, \dots, x_m, u, y) = \Phi^{(m)}(x_1, \dots, x_m, S_m^1(u, y))$$

Ricordando la notazione per le Φ , risulta chiaro che né y né $S_m^1(u, y)$ sono variabili proprie, di ingresso, rispettivamente di $\Phi^{(m+1)}$ e $\Phi^{(m)}$, ma sono i numeri dei programmi che calcolano $\Phi^{(m+1)}$ e $\Phi^{(m)}$.

In particolare, se $e = y = \#(P)$ allora possiamo interpretare $S_m^1(u, y)$ come il numero di un programma che per prima cosa assegna il valore u alla variabile x_{m+1} e, successivamente, esegue il programma P .

Un programma che assegna il valore u ad x_{m+1} è il seguente:

$$\left. \begin{array}{l} x_{m+1} \leftarrow x_{m+1} + 1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \leftarrow x_{m+1} + 1 \end{array} \right\} u \text{ volte}$$

N.B.
Nel caso di $\Phi^{(m)}$, x_{m+1} non è una variabile di ingresso in senso stretto; il suo valore di partenza è 0.

Dobbiamo adesso calcolare il numero dell'istruzione non etichettata $x_{m+1} \leftarrow x_{m+1} + 1$.

Abbiamo :

$$\#(I) = \langle a, \langle b, c \rangle \rangle = \langle 0, \langle 1, 2m+1 \rangle \rangle$$

Infatti :

$a = 0$ perché non c'è etichetta.

$b = 1$ perché l'istruzione è di "incremento".

$$c = \#(v) - 1 = \#(X_{m+1}) - 1 = 2(m+1) - 1 = 2m + 1$$

($\#(X_{m+1}) = 2(m+1)$ perché le X_{m+1} è la $(m+1)$ esima variabile di impulso e tali variabili occupano sempre posto pari nell'ordinamento dato).

Calcoliamo adesso il valore di $\#(I)$:

Ricordiamo che $\langle u, y \rangle = 2^u (2y + 1) - 1$

Si ha che :

$$\langle b, c \rangle = \langle 1, 2m+1 \rangle = 2(2(2m+1) + 1) - 1 = 8m + 5$$

e sostituendo :

$$\begin{aligned} \langle a, \langle b, c \rangle \rangle &= \langle 0, 8m+5 \rangle = 2^0 (2(8m+5) + 1) - 1 = \\ &= 16m + 10. \end{aligned}$$

Il numero di codice dell'istruzione non etichettata $X_{m+1} \leftarrow X_{m+1} + 1$

è dunque $16m + 10$.

$S_m^1(u, y)$ è il numero del nuovo programma
mentre y è il numero del programma originario
 P .

Allora abbiamo che

$$y = \#(P) = [\#(I_1), \dots, \#(I_q)] - 1.$$

Vogliamo esprimere y esplicitamente come
numero di Gödel, come prodotto di numeri
primi elevati ad esponenti opportuni.

Al momento conosciamo y ma non conosciamo
esplicitamente né q né tali esponenti;

- q lo ricaviamo mediante l'operatore
lunghezza Lt :

$$q = Lt([\#(I_1), \dots, \#(I_q)]) = Lt(y+1)$$

- gli esponenti da dare ai primi $Lt(y+1)$
numeri primi, che sono quelli che compaiono
nella scrittura esplicita del numero di Gödel
di P , si possono calcolare mediante la
funzione $([])_i$

L'esponente da dare a p_j è:

$$([\#(I_1), \dots, \#(I_q)])_j = (y+1)_j$$

Avremo quindi che:

$$y = \#(P) = \prod_{j=1}^{Lt(y+1)} p_j^{(y+1)_j} - 1$$

utilizziamo adesso questi dati per calcolare $S_m^1(u, y)$

Come si è già affermato, $S_m^1(u, y)$ è il numero di codice del programma che si ottiene premettendo le u istruzioni:

$$\begin{aligned} X_{u+1} &\leftarrow X_{u+1} + 1 \\ &\vdots \\ X_{u+1} &\leftarrow X_{u+1} + 1 \end{aligned} \quad (*)$$

al programma P .

Ciò che dobbiamo fare per trovare tale numero di codice è quindi trovare di u unità i numeri primi p_j che compaiono in P e calcolare il codice delle u istruzioni (*).

Il codice delle (*) è dato da:

$$\prod_{i=1}^u p_i^{16u+10} \quad \left(\begin{array}{l} \text{per trovare il} \\ \text{codice del "programma"} \\ \text{dobbiamo sottrarre 1} \end{array} \right)$$

e quindi si ha che:

$$S_m^1(u, y) = \left[\left(\prod_{i=1}^u p_i \right)^{16u+10} \cdot \prod_{j=1}^{Lt(y+1)} p_{u+j}^{(y+1)_j} \right] - 1$$

È evidente che S_m^1 è una funzione ricorsiva primitiva.

Completiamo adesso la dimostrazione.

Supponiamo il risultato valido per $n=k$ e vogliamo mostrare che lo è anche per $k+1$.

Si ha che:

$$\begin{aligned}\Phi^{(m+k+1)}(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, y) &= \\ &= \Phi^{(m+k)}(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_k, S_{m+k}^1(u_{k+1}, y)) \\ &= \Phi^{(m)}(x_1, \dots, x_m, S_m^k(u_1, \dots, u_k, S_{m+k}^1(u_{k+1}, y)))\end{aligned}$$

Se adesso poniamo

$$S_m^{k+1}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, y) = S_m^k(u_1, \dots, u_k, S_{m+k}^1(u_{k+1}, y))$$

il risultato risulta dimostrato.

Consideriamo adesso un' applicazione immediata del teorema del parametro.

Siano $\Phi_u(x)$ e $\Phi_v(x)$ due funzioni di una variabile calcolate dai propri numeri u e v rispettivamente.

Consideriamo adesso la composizione delle due funzioni

$$\Phi_u(\Phi_v(x))$$

che sicuramente sarà anch'essa calcolabile perché la composizione preserva la calcolabilità.

Esisterà quindi un programma che calcola $\Phi_u(\Phi_v(x))$. Vogliamo trovare il numero di tale programma come funzione di u e v ; in altre parole vogliamo trovare $g(u, v)$ nell'equazione:

$$\Phi_u(\Phi_v(x)) = \Phi_{g(u, v)}(x)$$

Abbiamo che:

$$\Phi_u(\Phi_v(x)) = \Phi(\Phi(x, v), u) = \Phi^{(3)}(x, u, v, z_0)$$

per qualche z_0 (numero di programma).

Applicando il teorema del parametro otteniamo:

$$\Phi^{(3)}(x, u, v, z_0) = \Phi(x, S_1^2(u, v, z_0)) = \Phi_{S_1^2(u, v, z_0)}(x)$$

attraverso $S_1^2(u, v, z_0)$ possiamo quindi ricavare la dipendenza di z_0 da u e v .

TEOREMA DI RICORSIONE

Sia $g(z, x_1, \dots, x_m)$ una funzione parzialmente calcolabile di $m+1$ variabili. Allora esiste un numero e tale che:

$$\Phi_e^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = g(e, x_1, \dots, x_m)$$

Prepariamo innanzitutto l'enumerato del teorema:

Date una funzione g parzialmente calcolabile un valore di una delle variabili e il numero di Gödel (il codice) di un programma che calcola g come funzione delle rimanenti variabili.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione parzialmente calcolabile $g(S_m^1(v, v), x_1, \dots, x_m)$.

Esisterà allora un programma z_0 tale che:

$$\begin{aligned} g(S_m^1(v, v), x_1, \dots, x_m) &= \Phi^{(m+1)}(x_1, \dots, x_m, v, z_0) = \\ & \text{(applicando il teorema del parametro)} \\ &= \Phi^{(m)}(x_1, \dots, x_m, S_m^1(v, z_0)). \end{aligned}$$

Poniamo adesso $v = z_0$, si ha che:

$$g(S_m^1(z_0, z_0), x_1, \dots, x_m) = \Phi^{(m)}(x_1, \dots, x_m, S_m^1(z_0, z_0))$$

ma $S_m^1(z_0, z_0)$ è un numero, n_0 e; abbiamo:

$$\begin{aligned} g(e, x_1, \dots, x_m) &= \Phi^{(m)}(x_1, \dots, x_m, e) \\ &= \Phi_e^{(m)}(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

Proposizione (esistenza del programma che si "auto-riproduce")

Esiste un numero e tale che, per ogni x :

$$\Phi_e(x) = e.$$

Dimostrazione

Consideriamo la funzione calcolabile

$$g(z, x) = u_1^2(z, x) = z$$

applichiamo a g il teorema di ricorsione, si ha che esiste un numero e tale che

$$\Phi_e(x) = g(e, x)$$

ma $g(e, x) = e$, quindi si ottiene

$$\Phi_e(x) = e.$$

Osservazione

Il programma numero e fa qualcosa di più che calcolare una funzione costante.

Qualunque sia la variabile d'ingresso, il programma numero e usa questa informazione per ricalcolare se stesso, cioè il suo numero di codice.

Teorema (del punto fisso)

Sia $f(x)$ una funzione calcolabile.
Allora esiste un numero e tale che

$$\Phi_{f(e)}(x) = \Phi_e(x)$$

↙ Cioè per qualsiasi funzione calcolabile
esiste un numero e tale che e e $f(e)$
sono numeri di programmi che calcolano
la stessa funzione Φ . ↘

Dimostrazione.

\bar{E} è una applicazione immediata del teorema
di ricorrenza.

$$\text{Poniamo } \Phi_{f(z)}(x) = g(z, x)$$

applichiamo il teorema di ricorrenza
a g ; si ha che esiste un e tale che

$$g(e, x) = \Phi_e(x)$$

ma $g(e, x) = \Phi_{f(e)}(x)$ per cui

$$\Phi_e(x) = \Phi_{f(e)}(x)$$

Sia T un insieme di funzioni parzialmente calcolabili di una sola variabile.

Associamo a T l'insieme di indici R_T con definito:

$$R_T = \{t \in \mathbb{N} \mid \Phi_t \in T\}$$

Si ha che:

TEOREMA (DI RICE)

Sia T un insieme di funzioni parzialmente calcolabili di una sola variabile.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni parzialmente calcolabili tali che $f(x)$ appartiene a T e $g(x)$ non vi appartiene.

Allora R_T non è ricorsivo.

Dimostrazione

Supponiamo che R_T sia calcolabile.

Consideriamo la funzione caratteristica di R_T :

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in R_T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

introduciamo ora la funzione h con definita:

$$h(t, x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } t \in R_T \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ci serve mostrare che h è parzialmente calcolabile. Basta osservare che può esprimersi come:

$$h(t, u) = g(u) \cdot P_T(t) + f(u) \cdot \alpha(P_T(t))$$

Dato che α è ^{parzialmente} calcolabile possiamo applicare ad h il lemma di ricorrenza.

Abbiamo che:

$$\Phi_e(u) = h(e, u)$$

ip: $f(u) \in T^1$
 $g(u) \notin T^1$

Ritorniamo questo risultato:

$$\Phi_e(u) = h(e, u) = \begin{cases} g(u) & \text{se } e \in R_T \Leftrightarrow \Phi_e(u) \in T^1 \\ f(u) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

vorriamo adesso stabilire se $\Phi_e(u)$ è uguale ad $f(u)$ oppure a $g(u)$.

Supponiamo che sia $\Phi_e(u) \in T^1$

allora avremo $\Phi_e(u) = g(u)$ e quindi $g(u) \in T^1$ ma, per ipotesi, $g(u) \notin T^1$.

Contraddizione.

Supponiamo allora che sia $\Phi_e(u) \notin T^1$

allora avremo $\Phi_e(u) = f(u)$ e quindi che $f(u) \notin T^1$.

Ma, per ipotesi, $f(u) \in T^1$.

Contraddizione.

Non possiamo quindi assumere che R_T è ricorsivo, ed il lemma è dimostrato.