Introduciamo adesso il seguente predicato:

$STP^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y, t) \Leftrightarrow$

Il programma numero y si ferma sulle variabili di ingresso $x_1, \dots, x_n$ dopo al più t passi.

Il teorema del programma universale ci permette di dimostrare immediatamente che

I PREDICATI $STP^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y, t)$ SONO CALCOLABILI.

Basta infatti fare una modifica al programma universale che conti i "passi" di calcolo compiuti dal programma e ci informi, in corrispondenza ad essi, se il programma si è fermato o meno.

```
        Z <-- X_{n+1} + 1

                n
        S <--  ∏  (p_{2i})^{Xi}
               i=1

        K <-- 1
[C]     Q <-- Q + 1                                   (*)
        IF Q > X_{n+2} + 1  GOTO E                    (*)
        IF K = Lt(Z) + 1 v K = 0  GOTO F
        U <-- r((Z)_K)
        P <-- p_{r(U)+1}
        IF l(U) = 0  GOTO N
        IF l(U) = 1  GOTO A
        IF ~(P | S)  GOTO N
        IF l(U) = 2  GOTO M
        K <-- min_{i ≤ Lt(Z)} [ l((Z)_i) + 2 = l(U) ]
        GOTO  C
[M]     S <-- ⌊S/P⌋
        GOTO  N
[A]     S <-- S . P
[N]     K <-- K + 1
        GOTO  C
[F]     Y <-- 1                                       (*)
```

Programma che calcola
$Y = STP^{(n)}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$.

INSIEMI RICORSIVAMENTE ENUMERABILI

Come già sappiamo, dire che un insieme B appartiene ad una qualche classe di funzioni è equivalente a dire che il predicato

$$P(x) \Longleftrightarrow x \in B$$

appartiene alla classe di funzioni detta. La relazione tra B e $P(x)$ è data da

$$B = \{x \in N \mid P(x)\}$$

Quindi dire che:

- l'insieme B è calcolabile (o ricorsivo) è equivalente a dire che $P(x)$ è una funzione calcolabile.
- l'insieme B è ricorsivo primitivo equivale a dire che $P(x)$ è ricorsivo primitivo.

Diamo adesso la seguente

DEFINIZIONE

Un insieme $B \subseteq N$ si dice <u>ricorsivamente enumerabile</u> se esiste una funzione parzialmente calcolabile $g(x)$ tale che

$$B = \{x \in N \mid g(x)\downarrow\}$$

("$\downarrow$" significa "è definita")

Se P è un programma che calcola la funzione g, allora possiamo dire che B è semplicemente l'insieme di tutti i valori di ingresso di P per i quali P prima o poi si ferma.

Esaminiamo adesso tale situazione dal punto di vista che segue:
Noi abbiamo a disposizione il programma P.
Di che aiuto è P per verificare se un certo elemento appartiene o no a B?

La risposta è che P ci aiuta solo parzialmente perché mentre su tutti gli elementi che appartengono a B il programma, prima o poi, si fermerà, sugli elementi che non appartengono a B il programma continuerà a girare per sempre (SENZA CHE NOI ABBIAMO MODO DI SAPERLO)

Quindi fino a quando P non si è fermato noi non sapremo mai se ha ancora bisogno di tempo per terminare il calcolo oppure se è entrato in un ciclo infinito e non si fermerà mai.

Abbiamo adesso le due nozioni di
- insieme ricorsivo e
- insieme ricorsivamente enumerabile.

LE RELAZIONI CHE INTERCORRONO TRA LORO SONO
STABILITE DALLE DUE PROPOSIZIONI CHE SEGUONO

PROPOSIZIONE

SE L'INSIEME B È RICORSIVO ALLORA È RICORSIVAMENTE ENUMERABILE

Dimostrazione

Consideriamo il seguente programma $\mathcal{P}$:

$[A]$ IF $\sim(X \in B)$ GOTO A

La prima domanda da porci è se $\mathcal{P}$ è un programma di $\mathcal{S}$, ossia se esiste una macroespansione di $\mathcal{P}$ in termini delle istruzioni base di $\mathcal{S}$.
La risposta è sì perché, essendo B ricorsivo per ipotesi, allora $X \in B$ è un predicato calcolabile.
Sia h la funzione calcolata da $\mathcal{P}$.
In base alla costruzione del programma h sarà definita solo negli elementi di B.
Avremo allora che:

$$B = \{x \in N \mid h(x)\downarrow\} \qquad (*)$$

e la proposizione è dimostrata perché la $(*)$ è proprio la definizione di insieme r.e., essendo h parzialmente calcolabile.

Proposizione (Post)

L'INSIEME B È RICORSIVO SE E SOLO SE SIA B CHE $\overline{B}$ SONO R.E. (RICORSIVAMENTE ENUMERABILI).

Dimostrazione

A) Sia B ricorsivo, sappiamo già che allora anche $\overline{B}$ è ricorsivo; applicando quindi la proposizione precedente sia a B che a $\overline{B}$ otteniamo che sia $\overline{B}$ che B sono r.e.

B) Ammettiamo adesso che sia B che $\overline{B}$ siano r.e.; possiamo allora scrivere, in base alla definizione, che

$$B = \{x \in N \mid g(x)\downarrow\}$$
$$\overline{B} = \{x \in N \mid h(x)\downarrow\}$$

con g ed h funzioni parzialmente calcolabili.

Siano: g calcolata dal programma $\mathcal{P}$
h calcolata dal programma $\mathcal{Q}$

e siano ancora $p = \#(\mathcal{P})$ e $q = \#(\mathcal{Q})$.

Il programma che segue calcola la funzione caratteristica di B e quindi B è ricorsivo:

```
[A]  IF STP^(1)(X, p, T) GOTO C
     IF STP^(1)(X, q, T) GOTO E
     T ← T+1
     GOTO A
[C]  Y ← 1
```

Osservazioni.

1. Cosa fa il programma?
Usa il predicato contapassi che è calcolabile per controllare, successivamente, se sulla variabile di ingresso X si ferma il programma P, se sì allora viene assegnato ad Y il valore 1; in caso contrario esegue lo stesso controllo su Q. Se il programma Q si ferma allora si ferma anche il nostro programma ma questa volta senza modificare il valore di Y che quindi rimarrà 0.
Il processo viene ripetuto per tutti i valori di T.
Poiché sia B che $\overline{B}$ sono per ipotesi r.e. il programma globale dovrà fermarsi su qualsiasi ingresso.

2. Tale risultato è intuitivamente più che naturale.
Il predicato contapassi ci permette però di tradurlo immediatamente in linguaggio formale appropriato.

Ritorniamo un attimo indietro al programma universale.

Per ciascun $n > 0$ abbiamo che la funzione

$$\Phi^{(n)}(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_{\mathcal{P}}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{con } \#(\mathcal{P}) = y$$

è parzialmente calcolabile.

Fissiamo adesso n,

avremo che la successione

$$\Phi^{(n)}(x_1, \ldots, x_n, 0),\ \Phi^{(n)}(x_1, \ldots, x_n, 1), \ldots$$

che può anche scriversi come

$$\Phi_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n),\ \Phi_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

enumera tutte le funzioni parzialmente calcolabili di n variabili.

Limitandoci al caso di una variabile possiamo allora scrivere

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x), \ldots$$

Individuiamo adesso:

$$W_n = \{x \in N \mid \Phi_n(x)\downarrow\}$$

abbiamo ovviamente che <u>un insieme è ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste un n per cui $B = W_n$.</u>

Definiamo adesso

$$K = \{n \in N \mid n \in W_n\}$$

Abbiamo che:

TEOREMA

K È R.E. MA NON È RICORSIVO.

Prima di passare alla dimostrazione esplicitiamo il simbolismo.

$$W_n = \{x \in N \mid \Phi_n(x)\downarrow\}$$

quindi:

$$n \in W_n \Longleftrightarrow \Phi_n(n)\downarrow \Longleftrightarrow HALT(n, n)$$

Allora:

K è l'insieme di tutti i numeri n tali che il programma numero n si fermerà, prima o poi, sull'ingresso n.

Passiamo adesso alla dimostrazione

Teorema. K è r.e. ma non è ricorsivo.

Dimostrazione.

$$K = \{n \in N \mid n \in W_n\} = \{n \in N \mid \Phi_n(n)\downarrow\}$$

Poiché $\Phi_n(n)$ è parzialmente calcolabile ne segue che K è r.e.

Ammettiamo adesso che lo sia anche $\overline{K}$

Allora $\overline{K}$ dovrebbe comparire nella numerazione W_i, cioè dovrebbe esistere un indice i tale che

$$\overline{K} = W_i \qquad (*)$$

Poniamoci adesso la domanda:

$i \in K$?

Abbiamo che:

$$i \in K \iff i \in W_i$$

ma, in base alla $(*)$, $i \in W_i \iff i \in \overline{K}$

e quindi avremmo che:

$$i \in K \iff i \in \overline{K}$$

Contraddizione.

$\overline{K}$ non può essere r.e. e quindi K <u>non</u> è ricorsivo.