FUNZIONI RICORSIVE PRIMITIVE

Corso di Informatica Teorica

Prof. **Settimo Termini**

Ancora sulle argomentazioni di Turing

Ma ricordiamo ancora una delle osservazioni fatte da Turing:

“No attempt has yet been made to show that the "computable" numbers include all numbers which would naturally be regarded as computable. All arguments which can be given are bound to be, fundamentally, appeals to intuition, and for this reason rather unsatisfactory mathematically.”
The real question at issue is: "What are the possible processes which can be carried out in computing a number?"

e ricordiamo che questo lo scrive all’inizio del §9 “The extent of the computable numbers.”

Scopo ultimo dell'analisi

Turing's "analysis" is a remarkable piece of applied philosophy in which, beginning with a human being carrying out a computation, he proceeds by a process of elimination of irrelevant details, through a sequence of simplifications, to an end result which is the familiar model consisting of a finite state device operating on a one-way infinite linear tape.

Martin Davis, "Why Godel Didn't Have Church's Thesis," Information and Control, Vol 54, Nos l/2, (July/Aug 1982), 14

Gli argomenti

The arguments which I shall use are of three kinds.

(a) A direct appeal to intuition.

(b) A proof of the equivalence of two definitions (in case the new definition has a greater intuitive appeal).

(c) Giving examples of large classes of numbers which are computable.

Nuove definizioni “intuitive”

In quello che segue cercheremo man mano di portare avanti, in parallelo i due punti b) e c), con il semplice cambiamento che ci concentreremo sulle ***funzioni*** calcolabili invece che sui ***numeri*** calcolabili. Ma mentre il punto c) è chiaro, per seguire il punto b) dobbiamo sforzarci di pensare e proporre nuove definizioni ***“che abbiano un maggiore richiamo intuitivo”***

RIPORTIAMO QUI LE CONDIZIONI

(b) A proof of the equivalence of two definitions (in case the new definition has a greater intuitive appeal).

(c) Giving examples of large classes of numbers which are computable.

Nuove definizioni “intuitive”

Storicamente, come abbiamo già accennato, i modelli che si sono subito confrontati sono quello di Alonzo Church (il ***lambda calcolo***) e la ***macchina di Turing***, assieme a quello di ***funzione ricorsiva***, in alcune possibili varianti.

QUALI SONO I PUNTI DI VISTA DIVERSI MA CON CONTENUTO INTUITIVO CHE OGGI POTREMMO PROPORRE PER RIPRESENTARE LE IDEE DEGLI ANNI ’30 IN MODO CHE SIANO DIDATTICAMENTE EFFICACE?

OGGI TRE PUNTI DI VISTA concettualmente diversi possono essere - oltre al modello “macchina” - uno puramente ***matematico*** e uno che più esplicitamente si rifà all’***informatica***.

Verso una definizione matematica “tradizionale”

Definiamo adesso una classe di funzioni che proponiamo come primo tentativo di carpire la nozione intuitiva di **funzione calcolabile** utilizzando gli strumenti e il linguaggio tradizionali della matematica.

Useremo **due** modi di combinare funzioni per ottenerne altre - usati comunemente nella pratica matematica - ed alcune funzioni da considerare come **“punto” di partenza**.
Sia le funzioni “iniziali” che i due metodi di combinare funzioni “soddisfano” i criteri **intuitivi** di calcolabilità.

Composizione

L'idea base è di combinare funzioni calcolabili in modo tale che l'**uscita** (il valore calcolato) di una sia l'**ingresso** (il valore da dare alla variabile) dell'altra.

Nel caso più semplice di funzioni di una variabile abbiamo che:

$$h(x) = f(g(x))$$

Più in generale, per funzioni di più variabili diamo la definizione seguente:

D DEFINIZIONE Sia f una funzione di k variabili e siano $g_1,\ldots, g_k$ funzioni di n variabili. Sia $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$.

Allora si dice che $\boldsymbol{h}$ **è ottenuta** da f e $g_1, \ldots, g_k$ **mediante composizione**.

Composizione

O OSSERVAZIONE Non c'è alcun bisogno che f, g_1, ..., g_k siano **totali**, cioè ovunque definite. Di conseguenza $h(x_1, \ldots, x_n)$ sarà definita quando sono definite tutte le g_1, ..., g_k in $(x_1, \ldots, x_n)$ e quando è pure definita la f in $(z_1, \ldots, z_k)$, essendo $z_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $z_k = g_k(x_1, \ldots, x_n)$.

Ricorsione

L'idea base è quella di estrarre le caratteristiche essenziali dell'usuale metodo di definizione di una funzione mediante induzione.

Tali caratteristiche, parlando "alla buona", sono:

- definire il valore assunto dalla funzione per l'argomento 0;
- definire il valore assunto dalla funzione per l'argomento $n+1$ facendo ricorso a valori assunti dalla funzione per argomenti *precedentemente* calcolati.

Tale modo di procedere ci permette di calcolare il valore della funzione per qualsiasi argomento, quindi soddisfa ai nostri criteri ***intuitivi*** di calcolabilità.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \end{cases}$$

Ricorsione

Abbiamo guardato le motivazioni intuitive

Passiamo adesso alle definizioni formali. Nel caso di una sola variabile si ha:

D **DEFINIZIONE** Una funzione h si dice ottenuta **per ricorsione** dalla funzione **totale** g (di due variabili) se può esprimersi come

$$\begin{cases} h(0) = k \\ h(t+1) = g(t, h(t)) \end{cases}$$

dove k è un numero fissato.

Ricorsione

Nel caso in cui trattiamo funzioni di più variabili abbiamo la seguente

D DEFINIZIONE Sia

$$\begin{cases} h(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n, t+1) = g(t, h(x_1, \ldots, x_n, t), x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

dove f e g sono due funzioni totali, rispettivamente, di n variabili e di $n+2$ variabili.

Allora la funzione $\boldsymbol{h}$ di n+1 variabili si dice **ottenuta** da f e g **mediante ricorsione**.

O OSSERVAZIONE Il meccanismo di ricorsione è identico nei due casi, l'unica differenza è data dalla presenza delle ***variabili aggiuntive*** x_1, ..., x_n che però si comportano da ***parametri***.

Un nuovo modello di funzione calcolabile

Daremo adesso una breve **lista di funzioni** tanto semplici da potere essere considerate, senza alcun dubbio, **calcolabili da un punto di vista intuitivo**. Poiché, come abbiamo osservato prima, anche le **due operazioni di combinazione di funzioni** prima introdotte, per così dire, **preservano la calcolabilità**, abbiamo ormai tutti gli strumenti per definire **una classe di funzioni calcolabili**.

Le funzioni che scegliamo per svolgere il ruolo di **funzioni iniziali**, come le chiameremo d'ora in poi, sono le seguenti:

Funzioni iniziali

$$s(x) = x + 1$$

Funzione **successore**

$$n(x) = 0$$

Funzione **costante zero**

$$u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Funzioni di **proiezione**

anche chiamate funzioni di **selezione**, funzioni di **scelta**, funzioni **identità**

Funzioni ricorsive primitive

D DEFINIZIONE Una funzione si dice **ricorsiva primitiva** se può essere ottenuta a partire dalle **funzioni iniziali** mediante un numero **finito** di applicazioni delle **operazioni di composizione** e **ricorsione**.

D DEFINIZIONE Una classe $\mathfrak{C}$ di funzioni totali è detta una **classe chiusa in modo ricorsivo primitivo** o classe PRC se:

1. Le funzioni iniziali appartengono a $\mathfrak{C}$,
2. Se una funzione è ottenuta a partire da funzioni appartenenti a $\mathfrak{C}$ mediante l'operazione di composizione o l'operazione di ricorsione allora appartiene anch'essa a $\mathfrak{C}$.

Funzioni ricorsive primitive

D **DEFINIZIONE** Dalla definizione precedente segue immediatamente che:
La classe delle funzioni ricorsive primitive è una classe PRC (chiusa in modo ricorsivo primitivo)
Possiamo anche andare oltre, come ci dice il seguente semplice

T **TEOREMA** **Una funzione è ricorsiva primitiva se e solo se appartiene ad ogni classe PRC.**

D **DIMOSTRAZIONE** $\Leftarrow$ Ammettiamo che una certa funzione f appartenga ad ogni classe PRC, poiché come afferma la definizione precedente, la classe delle funzioni ricorsive primitive è una classe PRC allora f sarà ricorsiva primitiva.

Funzioni ricorsive primitive

D **DIMOSTRAZIONE** $\Rightarrow$ Ammettiamo che f sia ricorsiva primitiva e sia $\mathfrak{C}$ una generica classe PRC. Vogliamo dimostrare $f \in \mathfrak{C}$.

Se esplicitiamo la definizione di funzione ricorsiva primitiva ci accorgiamo che affermare che f è ricorsiva primitiva equivale ad ammettere che esiste una successione di funzioni $f_1, \ldots, f_n$ tale che $f_n = f$ ed ognuna delle funzioni f_i $(i < n)$ che precedono f_n o è una funzione iniziale o può essere ottenuta da funzioni precedenti mediante composizione o ricorsione.

Ora, per definizione, le funzioni iniziali sicuramente appartengono a $\mathfrak{C}$; inoltre $\mathfrak{C}$ è chiusa sotto le operazioni di composizione e ricorsione e quindi tutte le funzioni della successione $f_1, \ldots, f_n$ appartengono a $\mathfrak{C}$. Poiché $f = f_n$ quindi $f \in \mathfrak{C}$ e poiché $\mathfrak{C}$ era una qualunque classe PRC il teorema è dimostrato. La dimostrazione in realtà è stata una semplicissima verifica.