Enunciamo, senza dimostrazione, una versione preliminare del teorema di Blum relativo alla particolare misura di complessità $M_i(x)$ e che si contenta di trovare un nuovo programma che calcola la funzione iniziale solo quasi ovunque.

Teorema

Sia $g(x, y)$ una qualsiasi funzione ricorsiva data. Esiste allora una funzione ricorsiva $f(x)$ tale che $f(x) \leq x$ ed ogniqualvolta $\Phi_i = f$ (cioè per ogni programma $\#i$ che calcola f) esiste un indice j (un altro programma) tale che la funzione calcolata dal programma $\#j$ coincide con f quasi ovunque:

$$\Phi_j(x) = f(x) \qquad \text{q.o.}$$

e la complessità di calcolo M_j è collegata ad M_i dalla relazione seguente:

$$g(x, M_j(x)) \leq M_i(x) \qquad \text{q.o.}$$

(M è la misura di complessità: massimo valore assunto da qualsiasi variab.

un: Esempio:

Sia $g(x,y) = 2^y$

allora la relazione

$$g(x, M_j(x)) \leq M_i(x) \quad q.o.$$

diventa:

$$2^{M_j(x)} \leq M_i(x) \quad q.o.$$

cioè

$$M_j(x) \leq \log_2 M_i(x) \quad q.o.$$

Il nuovo programma quindi è estremamente meno complesso di quello di partenza.

Si pensi che g può essere qualsiasi funzione ricorsiva, anche la funzione di Ackermann, e quindi può aversi una riduzione di complessità veramente drastica.

Lemma

Esiste una funzione ricorsiva $t(u,w)$ tale che:

$$\Phi_{t(u,w)}(x) = \begin{cases} \Phi_u(x) & \text{se } x > \ell(w) \\ (r(w))_{x+1} & \text{se } x \leq \ell(w) \end{cases}$$

avendosi $M_{t(u,w)}(x) = M_u(x)$ se $x > \ell(w)$

(cioè, a complessità invariata nella zona in cui $\Phi_{t(u,w)}$ coincide con $\Phi_u(x)$).

Dimostrazione

Siano u e w numeri dati.

Sia P_u il programma numero u se tale programma inizia con un'etichetta altrimenti sia la modifica di tale programma ottenuta aggiungendo un'etichetta alla prima istruzione (etichetta diversa da tutte le altre eventualmente presenti nel programma).

Sia L tale etichetta (già presente o aggiunta).

Sia poi $Q_{u,w}$ un programma che calcola la funzione ricorsiva primitiva $(r(w))_{x+1}$. Tale programma sia tale da non avere nessuna etichetta in comune con P_u e da terminare con una istruzione di salto.

Sia adesso V una variabile locale che non è presente né in P_u né in $Q_{u,w}$.

Consideriamo adesso il programma che segue e sia $t(u, w)$ il numero di questo programma.

$$V \leftarrow X$$

$$\left.\begin{array}{l} V \leftarrow V-1 \\ V \leftarrow V-1 \\ \cdots\cdots \\ V \leftarrow V-1 \end{array}\right\} \ell(w)$$

IF $V \neq 0$ GOTO L

$Q_{u,w}$

P_u

Vediamo adesso che tale programma fa proprio quello che noi vorremmo.

- Se $x > \ell(w)$ allora la variabile V avrà un valore diverso da 0 quando verrà attivata l'istruzione "IF" e perciò verrà poi eseguito il programma P_u.

  Quindi: $\Phi_{t(u,w)}(x) = \Phi_u(x)$

- Se $x \leq \ell(w)$,

  quando si arriva all'istruzione "IF", V sarà 0 e quindi verrà eseguito il programma $Q_{u,v}$; avremo quindi $\Phi_{t(u,w)}(x) = (r(w))_{x+1}$.

Rimane da mostrare che per $x > \ell(w)$

$$M_{t(u,w)}(x) = M_u(x).$$

Le uniche istruzioni usate oltre a quelle di P_u sono, in questo caso $V \leftarrow X$ e $V \leftarrow V-1$. Tra queste solo $V \leftarrow X$ può aumentare i valori delle variabili. È facile controllare

In realtà nello scrivere le macro espansioni di alcune macro dobbiamo stare molto attenti.
Se c'è, ad esempio, una macro

GOTO A (*)

all'interno di un ciclo ed espandiamo la (*) nel modo più ovvio cioè:

$Z \leftarrow Z+1$
IF $Z \neq 0$ GOTO L

allora la variabile Z può assumere valori arbitrariamente grandi a seconda del numero di volte che passiamo attraverso la (*).

Una via di uscita da tale problema è data dalla seguente regola:

Espandere tutte le macro (*) in modo uniforme, utilizzando la stessa variabile ausiliaria Z come

IF $Z \neq 0$ GOTO L

ponendo l'istruzione $Z \leftarrow Z+1$ in una opportuna posizione, prima di tutte le (*) e al di fuori di possibili cicli.

Per espandere la macro $V \leftarrow X$

abbiamo già a disposizione la macro espansione

```
[A]  IF X≠0 GOTO B
     GOTO C
[B]  X ← X - 1
     Y ← Y + 1
     Z ← Z + 1
     GOTO A
[C]  IF Z≠0 GOTO D
     GOTO E
[D]  Z ← Z - 1
     X ← X + 1
     GOTO C
```

Mostriamo adesso la

Proposizione

Sia $g(x, y)$ una qualsiasi funzione ricorsiva data. Allora esiste una funzione ricorsiva $f(x)$ tale che $f(x) \leq x$ e ogni volta che $\Phi_i = f$ esiste un indice j tale che:

$$\Phi_j(x) = f(x) \qquad (*)$$

$$\text{e} \quad g(x, M_j(x)) \leq M_i(x) \quad \text{quasi ovunque.}$$

(Questa proposizione non fa altro che togliere la condizione q.o. dalla relazione $(*)$ dalla prima versione del teorema dell'accelerazione)

Dimostrazione

In base al teorema citato si ha che esiste un indice j tale che

$$\Phi_j(x) = f(x) \quad \text{quasi ovunque}$$

$$\text{e} \quad g(x, M_j(x)) \leq M_i(x) \quad \text{quasi ovunque}$$

Sia $\Phi_j(x) = f(x)$ per $x > x_0$ e poniamo

$$w = < x_0, [f(0), \dots, f(x_0)] >$$ (si noti: è usata una doppia codifica)

Poniamo $\bar{j} = t(j, w)$; usando il lemma precedente:

$$\Phi_{\bar{j}}(x) = \Phi_{t(j,w)}(x) = \begin{cases} \Phi_j(x) & \text{se } x > x_0 \\ (r(w))_{x+1} = f(x) & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

quindi $\Phi_{\bar{j}} = f$

Sempre per il lemma precedente abbiamo che $M_{\bar{j}}(x) = M_j(x)$ quasi ovunque

e quindi si ha che:

$$g(x, M_{\bar{j}}(x)) = g(x, M_j(x)) \leq M_j(x).$$

TEOREMA DELL'ACCELERAZIONE DI BLUM

(versione generale).

Sia $g(x,y)$ una qualsiasi funzione ricorsiva data e sia $\mathcal{C}$ una qualsiasi misura di complessità. Allora esiste una funzione ricorsiva $f(x)$ tale che $f(x) \le x$ ed ognivolta che $\Phi_i = f$ esiste un indice j tale che

$$\Phi_j(x) = f(x)$$

e $$g(x, \mathcal{C}_j(x)) \le \mathcal{C}_i(x) \qquad \text{quasi ovunque}$$

Dimostrazione

Applichiamo il teorema del collegamento ricorsivo alla misura di complessità (specifica) M ed alla misura di complessità (generica) $\mathcal{C}$.

Abbiamo che esiste una funzione ricorsiva $r(x,y)$ tale che:

$$r(x,y) < r(x,y+1)$$

e $$\mathcal{C}_i(x) \le r(x, M_i(x)) \qquad \text{quasi ovunque}$$

$$M_i(x) \le r(x, \mathcal{C}_i(x)) \qquad \text{quasi ovunque}$$

Poniamo $$h(x,y) = \sum_{z \le y} g(x,z)$$

h è ricorsiva ed, ovviamente, si ha che

$$h(x,y) \ge g(x,y)$$

$$h(x,y+1) \ge h(x,y)$$

Poniamo

$$\bar{g}(x,y) = r(x, h(x, r(x,y)))$$

Applicando adesso la proposizione precedente usando la $\bar{g}$ si ha che:

$$\bar{g}(x, M_j(x)) \leq M_i(x) \quad \text{quasi ovunque}$$

quindi, quasi ovunque, si ha che:

$$r(x, g(x, e_j(x))) \underset{\uparrow}{\leq} r(x, h(x, e_j(x)))$$

perché $g(x,y) \leq h(x,y)$

$$\underset{\uparrow}{\leq} r(x, h(x, r(x, M_j(x)))) \underset{\uparrow}{=} \bar{g}(x, M_j(x))$$

perché $e_j(x) \leq r(x, M_j(x))$ (coll. ricorsivo) — per def. di $\bar{g}$

$$\underset{\uparrow}{\leq} M_i(x) \quad \underset{\uparrow}{\leq} r(x, e_i(x))$$

per la prop prec. — (teor. coll. ricorsivo)

Abbiamo quindi che, quasi ovunque,

$$r(x, e_i(x)) \geq r(x, g(x, e_j(x))) \quad (*)$$

Tiriamo le conclusioni:

Se fosse $e_i(x) < g(x, e_j(x))$ per tutti gli x avremmo sempre che:

$$r(x, e_i(x)) < r(x, g(x, e_j(x)))$$

contro ciò che afferma la $(*)$.

Dobbiamo quindi avere che

$$e_i(x) \geq g(x, e_j(x)) \quad \text{quasi ovunque.}$$