COMPLESSITÀ ASTRATTA (Osservazioni preliminari).

Tra le cose "molto naturali" che ci sembra dovrebbero avvenire studiando problemi di complessità di calcolo vi sono le seguenti:

— Possono esservi misure di complessità MOLTO DIVERSE: non è facile passare da una misura ad un'altra misura.
Le considerazioni fatte a proposito di una misura non dovrebbero potersi trasferire nello studio di ogni altra misura

NO: Tutte le misure di complessità (della teoria assiomatica) sono collegate: TEOR. DEL COLLEGAMENTO RICORSIVO.

— Immaginiamo di avere delle forti limitazioni sulle risorse di calcolo utilizzabili. Se riusciamo a raddoppiarle dovrebbe essere possibile fare molte più cose

NO: In generale no; se la funzione che limita le risorse è "strana", pur aumentandola in modo ricorsivo non riusciamo a fare più cose: TEOREMA DELLA LACUNA

— Data una funzione calcolabile sicuramente esiste un programma ottimale dal punto di vista dell'uso delle risorse (un programma più "semplice", minimale o **almeno** vari programmi "minimali" non confrontabili tra loro). Il problema è: COME TROVARLI?

NO: Esistono delle funzioni calcolabili che possono essere calcolate da programmi sempre più rapidi: TEOREMA DELL'ACCELERAZIONE.

COMPLESSITÀ ASTRATTA

Ci muoveremo ad un livello molto astratto così che i risultati trovati saranno validi per qualsiasi tipo di misura che concretamente verrà proposta.

Definizione

Una funzione partiale binaria C su N si chiama <u>misura di complessità</u> se soddisfa i due assiomi seguenti (Assiomi di Blum)

1. $C(x,i)\downarrow$ se e solo se $\Phi_i(x)\downarrow$

2. Il predicato $C(x,i) \le y$ è ricorsivo.

Esempi

I. Sia $C(x,i) = C_i(x)$ = numero di passi in un calcolo effettuato dal programma i sulla variabile di ingresso x.

Verifichiamo gli assiomi:
Basta ricordare cosa fa il predicato (calcolabile) contapassi STP

II. $C_i(x)$ = massimo valore assunto da ogni variabile del programma numero i quando a questo programma è fornita la variabile di ingresso x, se $E_i(x)$ è definita.
Altrimenti $C_i(x)\uparrow$.

Indichiamo questa misura con $M_i(x)$.

- Il primo assioma è necessariamente soddisfatto.

- Osserviamo che per un programma dato sono possibili solo un numero finito di descrizioni istantanee nelle quali tutte le variabili assumono valori inferiori o eguali ad un certo numero y.

  Possiamo quindi controllare se, dati i, x, y, la condizione $M_i(x) \leq y$ è verificata o meno.
  Infatti possiamo far girare il programma i sulla variabile di ingresso x finché:

- Il calcolo termina con tutti i valori delle variabili che hanno valori $\leq y$.
  Diamo il valore VERO.

- Raggiungiamo una configurazione nella quale almeno una variabile ha il valore $> y$.
  Diamo il valore FALSO.

- Si passa due volte per la stessa configurazione.
  Ciò vuol dire che si è in un ciclo infinito.

Osserviamo che non si può prendere come misura di complessità la funzione stessa.

Infatti, mentre il primo assioma è (banalmente) soddisfatto, il secondo assioma non lo è:

Sia $\Phi_i(x)$ la funzione:

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in S \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove S è un insieme r.e. ma <u>non ricorsivo</u>.

La condizione $\Phi_i(x) \leq 0$ è equivalente a $x \in S$ e quindi <u>non</u> è ricorsiva (contrariamente a quanto richiesto dall'assioma).

Definiamo adesso <u>fattore di scala</u> una funzione <u>ricorsiva $r(x)$</u> se

- r è crescente $(x \leq y \Rightarrow r(x) \leq r(y))$
- r assume valori arbitrariamente grandi.

Osserviamo che il secondo assioma di Blum

Il pred. $C(x, i) \leq y$ è ricorsivo (a)

è equivalente a ciascuna delle due versioni che seguono:

Il predicato $C(x, i) = y$ è ricorsivo (b)

Il predicato $C(x, i) < y$ è ricorsivo (c)

Basta scrivere ciascuno dei predicati in modo opportuno usando solo operazioni ricorsive.

Si ha che:

$$- \; C(x,i) = y \iff \big(C(x,i) \leq y \;\&\; \sim (C(x,i) \leq y \dot{-} 1) \big) \vee \big(y = 0 \;\&\; C(x,i) \leq y \big)$$

$$- \; C(x,i) < y \iff (\exists z)_{<y} (C(x,i) = z)$$

$$- \; C(x,i) \leq y \iff C(x,i) < y + 1$$

Convenzione notazionale

In ciò che segue può essere utile considerare una funzione parziale su N come una funzione totale che prende valori in $N \cup \{\infty\}$.

SCRIVEREMO QUINDI $f(x) = \infty$ PER INDICARE CHE $f(x)$ NON È DEFINITA ($f(x) \uparrow$)

Proposizione

Sia $C_i(x)$ una misura di complessità e sia $r(x)$ un fattore di scala.
Poniamo $D_i(x) = r(C_i(x))$.
$D_i(x)$ è una misura di complessità.

Dimostrazione

1. Il primo assioma di Blum è soddisfatto perché la composizione di r e C_i non modifica il dominio di definizione di C_i.

2. Anche il secondo assioma si verifica facilmente.
   Ciò che dobbiamo verificare è che

   $D_i(x) \leq y$ è ricorsivo.

   Sia t il numero tale che:

   $$r(0) \leq r(1) \leq \dots \leq r(t) \leq y < r(t+1).$$

   Mostriamo adesso che:

   $$D_i(x) \leq y \iff C_i(x) \leq t$$

   - Se $C_i(x) \leq t$ allora
     $$D_i(x) = r(C_i(x)) \leq r(t) \leq y$$
   - Se $C_i(x) \leq t$ è falso allora
   - $C_i(x) \geq t+1$ e quindi
     $$D_i(x) = r(C_i(x)) \geq r(t+1) > y.$$

e la proposizione è dimostrata.

Vogliamo adesso mostrare una proposizione che "approssima" una sorta di inversa della proposizione precedente.

TEOREMA DEL COLLEGAMENTO RICORSIVO TRA MISURE DI COMPLESSITÀ.

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due misure di complessità arbitrarie. Allora esiste una funzione ricorsiva $r(x,y)$ tale che $r(x,y) < r(x,y+1)$ e, per ogni i,

$$C_i(x) \leq r(x, D_i(x)) \quad \text{quasi ovunque}$$
$$D_i(x) \leq r(x, C_i(x)) \quad \text{quasi ovunque.}$$

(laddove $C_i(x)$ non è definita poniamo $r(x, C_i(x))\uparrow$ per cui, nella convenzione usata, si ha $r(x,\infty)=\infty$)

Dimostrazione

$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, essendo misure di complessità, soddisfano al primo assioma di Blum e sono quindi definite sullo stesso dominio:

$$C_i(x)\downarrow \iff \Phi_i(x)\downarrow \iff D_i(x)\downarrow$$

Il secondo assioma di Blum richiede che i predicati $C_i(x)=y$ e $D_i(x)=y$ siano ricorsivi per cui anche il predicato

$$C_i(x)=y \vee D_i(x)=y$$

è ricorsivo.

Definiamo adesso la funzione

$$h(i,x,y) = \begin{cases} \max(C_i(x), D_i(x)) & \text{se } C_i(x)=y \vee D_i(x)=y. \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione h è ricorsiva.

Osserviamo che C e D si presentano in modo simmetrico nella definizione di h.

$$h(i,x,y) = \begin{cases} \max(C_i(x), D_i(x)) & \text{se } C_i(x)=y \vee D_i(x)=y \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poniamo adesso

$$r(x,y) = y + \max_{j\le x} \max_{z\le y} h(j,x,z)$$

$r(x,y)$ è ricorsiva.

Abbiamo che:

$$r(x,y+1) = y+1 + \max_{j\le x} \max_{z\le y+1} h(j,x,z)$$

$$> y + \max_{j\le x} \max_{z\le y} h(j,x,z) = r(x,y)$$

La r, quindi, soddisfa alle richieste dell'enunciato.

Mostriamo adesso che: $\quad C_i(x) \le r(x, D_i(x))$ q.o.

Si ha:

$$r(x,D_i(x)) = D_i(x) + \max_{j\le x} \max_{z\le D_i(x)} h(j,x,z)$$

$$\ge \max_{j\le x} \max_{z\le D_i(x)} h(j,x,z)$$

$$\ge \max_{j\le x} h(j,x,D_i(x))$$

q.o. $\longrightarrow$ $\ge h(i,x,D_i(x))$ $\boxed{\text{per } x\ge i}$

(p. def. di h essendo $y=D_i(x)$) $\longrightarrow$ $= \max(C_i(x), D_i(x))$

$$\ge C_i(x).$$

Abbiamo quindi che:

$$r(x, D_i(x)) \ge C_i(x) \quad \text{per tutti gli } x\ge i$$

(e quindi quasi ovunque).

Data la definizione di h, identico schema si può seguire per mostrare che

$D_i(x) \le r(x, C_i(x))$ quasi ovunque.

Sia adesso $\mathcal{C}$ una misura di complessità fissata, e sia $t(x)$ un limite alla complessità di calcolo (limite imposto dall'esterno, dato dagli strumenti che sono a nostra disposizione; in altri termini $t(x)$ è un <u>limite</u> di complessità che non possiamo superare).

Ciò vuol dire, ricordando che $\mathcal{C}_i(x)\downarrow$ se e solo se $\Phi_i(x)\downarrow$, che tra quei valori di x tali che $\Phi_i(x)$ è definita noi abbiamo la possibilità di calcolare i valori assunti da Φ_i solo per quegli x tali che $\mathcal{C}_i(x) \le t(x)$.

Tale limite venga adesso innalzato mediante una funzione ricorsiva g che ci fa quindi passare da $t(x)$ a $g(t(x))$.

Ci aspetteremmo di potere effettuare più calcoli, qualunque siano t e g, dal momento che abbiamo a disposizione più "capacità di calcolo".

Il prossimo teorema (della lacuna) ci permetterà di ottenere il seguente risultato:

Esistono delle funzioni ricorsive t tali che, se è proprio t il limite alla nostra capacità di calcolo, può aversi che sia, per ogni i,

$$\mathcal{C}_i(x) \le g(t(x)) \quad \text{ma non} \quad \mathcal{C}_i(x) \le t(x)$$

SOLO PER UN NUMERO <u>FINITO</u> DI VALORI DI x

TEOREMA DELLA LACUNA (GAP THEOREM)

Sia $g(x, y)$ una qualsiasi funzione ricorsiva tale che $g(x, y) > y$.
Allora esiste una funzione ricorsiva $t(x)$ tale che, per $x > i$,

$$C_i(x) < g(x, t(x)) \text{ implica } C_i(x) \leq t(x).$$

Dimostrazione

Sia il predicato

$$P(x, y) \longleftrightarrow (\forall i)_{<x} \left(C_i(x) \leq y \vee g(x, y) \leq C_i(x) \right)$$

$C_i(x) \leq y$ è un predicato computabile essendo $C_i(x)$ una misura di complessità (che deve perciò soddisfare il secondo assioma di Blum)

Anche il predicato $g(x, y) \leq C_i(x)$ è calcolabile (*)

per cui si ha che

$P(x, y)$ è calcolabile

Definiamo ora

$$t(x) = \min_y P(x, y)$$

t è quindi una funzione parzialmente calcolabile.

(*) Infatti: $g(x, y) \leq C_i(x) \Longleftrightarrow \sim (\exists z)_{< g(x,y)} \left(z = C_i(x) \right)$

Commenti al teorema della lacuna.

deve essere $g(x,y) > y$ per rendere significativo il teorema.

Altrimenti avremmo

$$e_i(x) < g(x, t(x)) \Rightarrow e_i(x) \leq t(x)$$

con $g(x, t(x)) \leq t(x)$

ma questo è banale.

(e in ogni caso dal punto di vista interpretativo non ci serve).

Vogliamo mostrare adesso che t è totale.

Sia x un numero dato e sia Q l'insieme di tutti i valori assunti da $\varrho_i(x)$ per quei valori dell'indice che sono inferiori ad x (e per i quali $\Phi_i(x)$ è definito: altrimenti non sarebbe definita neanche $\varrho_i(x)$):

$$Q = \{ \varrho_i(x) \mid i < x \ \& \ \Phi_i(x)\downarrow \}.$$

Poniamo

$$y_0 = \begin{cases} \max \text{ elemento di } Q, & \text{se } Q \neq \phi \\ 0, & \text{se } Q = \phi \end{cases}$$

Mostriamo adesso che $P(x, y_0)$ è vero.

- Scegliamo $i < x$. Allora se $\Phi_i(x)\downarrow$ anche $\varrho_i(x)\downarrow$ e quindi $Q \neq \phi$ e quindi $\varrho_i(x) \leq y_0$

In base alla definizione,

$$P(x, y_0) \longleftrightarrow (\forall i)_{<x} \left(\varrho_i(x) \leq y_0 \vee g(x, y_0) \leq \varrho_i(x) \right)$$

e quindi $P(x, y_0)$ è soddisfatto.

Se $\Phi_i(x)\uparrow$ allora anche $\varrho_i(x)\uparrow$;

$g(x, y_0)$ è definita, essendo ricorsiva (e quindi totale) e quindi la diseguaglianza $g(x, y_0) \leq \varrho_i(x)$ è soddisfatta (si ricordi la convenzione di assegnare il valore ∞ nei punti in cui una f. non è definita)

Quindi anche in questo caso $P(x, y_0)$ è soddisfatto.
Abbiamo quindi mostrato che esiste per ogni $x \in N$, un numero y (che è y_0) tale che $P(x, y)$ è soddisfatto.
Quindi la funzione $\underline{t(x)} = \min_y P(x, y)$ è totale e quindi ricorsiva.

Sia adesso un valore di $x > i$ e sia

$$\varphi_i(x) < g(x, \underline{t(x)}) \qquad (*)$$

Poiché $P(x, \underline{t(x)})$ è soddisfatto ed $i < x$ si ha che (per definizione di P):

$$\varphi_i(x) \leq t(x) \vee g(x, t(x)) \leq \varphi_i(x).$$

Ma poiché per la $(*)$ il secondo pezzo della disgiunzione non è soddisfatto, deve necessariamente essere $\varphi_i(x) \leq t(x)$.

Siano disponibili due calcolatori $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$
e sia $\mathcal{C}$ molto più lento dell'altro.

Siano $\mathcal{C}_i(x)$ il tempo di calcolo di $\mathcal{C}$
e $\mathcal{D}_i(x)$ quello di $\mathcal{D}$,
quando gira il programma numero i
sulla variabile di ingresso x.

Applichiamo a $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{D}_i$ il teorema del collegamento ricorsivo:

Esiste una funzione ricorsiva r tale che:

$$\mathcal{C}_i(x) \leq r(x, \mathcal{D}_i(x)) \quad q.o.$$

Definiamo ora

$$g(x,y) = r(x,y) + y + 1$$

avremo che $g(x,y) > y$ e $g(x,y+1) > g(x,y)$
quindi sarà

$$\mathcal{C}_i(x) \leq g(x, \mathcal{D}_i(x)) \quad q.o.$$

Sia $t(x)$ una funzione che soddisfa il teorema della lacuna per $\mathcal{C}$ e rispetto a g.

Sia P un programma numero i tale che

$$\mathcal{D}_i(x) \leq t(x) \quad q.o.$$

Avremo che:

$$\mathcal{C}_i(x) \leq g(x, \mathcal{D}_i(x)) \leq g(x, t(x)) \quad q.o.$$

ma per il teorema della lacuna questo implica che

$$\mathcal{C}_i(x) \leq t(x) \quad q.o.$$