102

MACCHINE DI TURING

Corso di Informatica Teorica - modulo 2

Prof. **Settimo Termini**

Introduzione

Se, come già abbiamo affermato, nel costruire una Teoria della calcolabilità siamo guidati del desiderio di ottenere una teoria della massima generalità, allora, in primo luogo dobbiamo, preliminarmente, cercare di elencare quali possano essere le vie da percorrere, i criteri da seguire, i principi generali a cui attenerci in questa impresa.

Siamo confortati dal fatto che lo stesso Turing, nel suo lavoro pionieristico, ha mescolato ai risultati tecnici da lui trovati una serie di analisi e considerazioni a sostegno del tentativo assolutamente generale che stava intraprendendo.

Indicazioni dell' articolo "particolare"

Quali sono le indicazioni che Turing ha tratto dall'analisi del processo di computo e che noi possiamo seguire?

- **Numero finito di simboli**
- **numero finito di stati**
- **processi di base il più possibile elementari**

VEDREMO ADESSO COME DEFINIRE UNA "MACCHINA" A PARTIRE DA QUESTA ANALISI

Introduzione

Decomponiamo il processo di calcolo nei suoi elementi costitutivi più piccoli.
Vediamo se tali elementi base presentano ancora elementi non di tipo meccanico. In caso negativo, potremo costruire una macchina che riproduce in modo completo il comportamento computistico dell'uomo. Qualunque calcolo effettuato dall'uomo può, in ultima istanza, ridursi ad una manipolazione di un numero **finito** di ***simboli*** effettuata seguendo un numero **finito** di ***istruzioni*** o ***regole***. Inoltre l'uomo osserverà solo un numero **finito** di simboli ***per volta*** e potrà ricordare ***istruzioni o operazioni già effettuate*** purché sempre in numero **finito**.
Queste brevi osservazioni (che sintetizzano l'analisi dettagliata compiuta da Turing) ci inducono a presentare un modello di macchina astratta che accoglie queste indicazioni.

Elementi costitutivi

1. Un nastro unidimensionale potenzialmente infinito nei due sensi, diviso in quadrati di eguale dimensione. Questi quadrati possono avere impresso un solo simbolo oppure niente.

2. Un occhio capace di osservare un solo quadrato per volta.

3. Una memoria in grado di ricordare solo un numero finito di istruzioni per volta.

Elementi costitutivi

Gli elementi precedenti li consideriamo realizzati da un aggeggio meccanico così costituito:

- $M =$ corpo della macchina di Turing (con un numero finito di stati interni)
- I simboli q_1, q_2, q_3, ... rappresentano gli stati di M
- I simboli s_1, s_2, ... sono simboli che possono essere impressi sul nastro.

$s_0 = B =$ non c'è scritto niente

Le quadruple

Le operazioni elementari possibili sono riassunte dai tre tipi di **quadruple**:

$$q_i \; s_j \; s_k \; q_l$$
$$q_i \; s_j \; \mathrm{R} \; q_l$$
$$q_i \; s_j \; \mathrm{L} \; q_l$$

Commentiamole brevemente.

Per semplicità, consideriamo un alfabeto consistente del solo simbolo $|$.

Per cui avremo:

$$s_0 = B$$
$$s_1 = |$$

Le quadruple

$$q_{\mathrm{i}} \; s_{\mathrm{j}} \; s_{\mathrm{k}} \; q_{\mathrm{l}}$$

la MdT si trova nello stato q_{i}, esaminando il simbolo s_{j} cambia, senza spostarsi, il simbolo s_{j} col simbolo s_{k} passando nello stato q_{l}.

O OSSERVAZIONE Può essere $\mathrm{j} = \mathrm{k}$.

Nel nostro caso (alfabeto consistente del solo simbolo $|$) l'istruzione precedente può assumere solo una delle forme che seguono.

Le quadruple

$q_i\ B\ B\ q_l$	lascia il quadrato bianco	$:\ q_i \to q_l$
$q_i\ B\ \vert\ q_l$	scrive $\vert$	$:\ q_i \to q_l$
$q_i\ \vert\ \vert\ q_l$	lascia ciò che è scritto	$:\ q_i \to q_l$
$q_i\ \vert\ B\ q_l$	cancella ciò che è scritto	$:\ q_i \to q_l$

questo per tutte le coppie di stati della nostra MdT

Le quadruple

Poi rimangono gli ordini di spostamento a destra e sinistra, qualunque sia il simbolo letto e lo stato nel quale si trova la MdT:

$q_i\ s_j\ \mathrm{R}\ q_l$	spostati a destra di un posto	$: q_i \to q_l$
$q_i\ s_j\ \mathrm{L}\ q_l$	spostati a sinistra di un posto	$: q_i \to q_l$

Le quadruple

Nel nostro caso, di un alfabeto formato solo da | (ricordiamo che c'è sempre B)

$q_i \; B \; \mathrm{R} \; q_l$	(leggendo B) spostati a destra di un posto	$: q_i \to q_l$
$q_i \; B \; \mathrm{L} \; q_l$	(leggendo B) spostati a sinistra di un posto	$: q_i \to q_l$
$q_i \mid \mathrm{R} \; q_l$	(leggendo |) spostati a destra di un posto	$: q_i \to q_l$
$q_i \mid \mathrm{L} \; q_l$	(leggendo |) spostati a sinistra di un posto	$: q_i \to q_l$

questo per tutte le coppie di stati della nostra MdT

Definizione di Macchina di Turing

Definiamo ora come **Macchina di Turing** (MdT) un insieme finito di quadruple nessuna delle quali ha identici ad un'altra entrambi i primi due simboli.

O OSSERVAZIONE Togliendo questa restrizione otteniamo una MdT non **deterministica**

L'alfabeto di una MdT è l'insieme di tutti i simboli s_j che occorrono nelle quadruple (eccetto s_0). Conveniamo che una MdT parte sempre dallo stato q_1.

Una MdT si **ferma** se trovandosi nello stato q_i esamina il simbolo s_j e **non esiste nessuna quadrupla della macchina che inizia con** $q_i s_j$.

Macchine di Turing non deterministiche

Abbiamo osservato che è possibile togliere la restrizione che nessuna delle quadruple possa avere i primi due simboli identici a quelli di un'altra quadrupla, ottenendo ciò che viene chiamato, come già indicato, **MdT non deterministica.**

- L'aggettivo non deterministico è da intendere nel senso che la MdT può seguire tutte le vie che le permettono le sue quadruple, quindi anche più vie contemporaneamente.
Quindi è una sorta di modello generale di computer "parallelo"

- l'aggettivo "non deterministico" - in questo contesto - NON ha quindi alcun rapporto con la nozione di probabilità.

Macchine di Turing non deterministiche

Domande:

1. Quando si ferma una MdT non deterministica?

2. Le MdT non deterministiche sono più potenti delle MdT tradizionali?

Le risposte sicuramente le conoscete, non so se avete già visto come si può dimostrare la risposta alla seconda domanda.

Torniamo un attimo alla definizione data:

“Definiamo come **Macchina di Turing** (MdT) un insieme finito di quadruple.”

Il suo lavoro - come sapete - è stato inviato per la pubblicazione sui *Proceedings della London **Mathematical** Society*.

Non pensate che a un **matematico** doveva sembrare particolarmente insolita una definizione di questo tipo?

Convenzioni

Usando delle opportune convenzioni per le variabili di ingresso e di uscita possiamo usare la MdT per definire una classe di funzioni computabili (**funzioni Turing calcolabili**).

Presentiamo in modo informale alcuni esempi di MdT.
Rappresentiamo **adesso** i numeri naturali nel seguente modo: useremo solo il simbolo $|$.
Ovviamente c'è sempre il quadrato bianco che viene rappresentato da B

In ingresso un numero n è rappresentato da un numero n+1 di barrette
In uscita da un numero n di barrette.

Macchina di Turing

Ingresso

$0 \rightarrow |;\ 1 \rightarrow ||;\ 2 \rightarrow |||;\ ...$

Uscita

Il risultato del calcolo sarà dato dal numero di simboli | presenti sul nastro quando la macchina si ferma.

Se all'ingresso abbiamo più variabili allora i valori corrispondenti saranno rappresentati uno di seguito all'altro separati da un riquadro bianco.
Quando la MdT parte si trova nello stato q_1 osservando il primo quadrato con simboli.

Successore

ESEMPIO 1 La **funzione successore**

Una MdT che calcola il successore è: $q_1\ B\ B\ q_1$.

Che succede infatti quando vogliamo calcolare, ad es., il successore di 3?

$$3 \to ||||$$
$$B\ q_1\ ||||\ B$$

Non esiste alcuna quadrupla che inizia con $q_1\ |$ e quindi la MdT si ferma.
Possiamo, adesso, andare a leggere sul nastro il risultato, che è "4" (grazie ai modi diversi di rappresentare i numeri in ingresso e in uscita.

Somma

E **ESEMPIO 2** La funzione somma di due variabili $x + y$

Una MdT che fa la somma è la seguente:

$q_1 \mid B \; q_1$

$q_1 \; B \; \mathrm{R} \; q_2$

$q_2 \mid \mathrm{R} \; q_2$

$q_2 \; B \; \mathrm{R} \; q_3$

$q_3 \mid B \; q_3$

Che cosa fanno (e devono fare) queste quadruple?
Teniamo bene in mente le caratteristiche della nostra rappresentazione dei numeri, in ingresso e in uscita (ricordando che sono DIVERSE!)

Esempi e simulatori

Il funzionamento di una MdT si può seguire con carta e penna, nel caso di un numero grande di quadruple è più facile seguirlo usando un simulatore.

Ve ne sono molti, uno di questi è indicato nel sito ed è quello che verrà usato anche in aula.

Funzione identità

E ESEMPIO 3 La funzione **identità**

Ricordando che i numeri sono rappresentati diversamente in ingresso ed in uscita, si ha che ciò che deve fare la MdT in questo caso è cancellare una barretta.
La MdT consiste della sola quadrupla

$$q_1 \mid B \; q_1$$

Funzione identità

Esempio di calcolo:

sia $x = 3$, allora $3 \rightarrow ||||$ e la configurazione iniziale della MdT sarà

... B q_1 |||| B ...

applicando adesso l'unica quadrupla della nostra MdT si ottiene:

... B q_1 B||| B ...

Poiché non esiste una quadrupla che inizia con q_1 B la MdT si ferma.

Leggiamo il risultato: è 3.

Sottrazione

E ESEMPIO 4 Sottrazione

Questa MdT è notevolmente più complicata delle precedenti:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 \mid Bq_1 \\ q_1BRq_2 \end{array}\right\} \quad \text{cancella una barretta sulla sinistra}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_2 \mid Rq_2 \\ q_2BRq_3 \end{array}\right\} \quad \text{localizza il B di separazione}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_3 \mid Rq_3 \\ q_3BLq_4 \end{array}\right\} \quad \text{localizza il termine destro}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_4 \mid Bq_4 \\ q_4BLq_5 \end{array}\right\} \quad \text{cancella una barretta sulla destra}$$

Sottrazione

$q_5 \mid L q_6\}$ se il secondo numero è stato cancellato si FERMA altrimenti va a q_6 ed a sinistra

$$\left.\begin{array}{l} q_6 \mid L q_6 \\ q_6 B L q_7 \end{array}\right\}$$ localizza il B di separazione

$$\left.\begin{array}{l} q_7 \mid L q_8 \\ q_7 B R q_9 \end{array}\right\}$$ invia alla (α) se il primo numero non è stato tutto cancellato altrimenti alla (β)

Sottrazione

$$(\alpha) \qquad \left.\begin{array}{l} q_8 \mid L q_8 \\ q_8 B R q_1 \end{array}\right\} \quad \text{localizza il termine sinistro e ritorna a } q_1$$

$$(\beta) \qquad \left.\begin{array}{l} q_9 B R q_9 \\ q_9 \mid L q_9 \end{array}\right\} \quad \text{entra in un ciclo infinito}$$

Sottrazione

DOMANDA **Cosa fa la MdT?**
Cancella una barretta dal primo numero ed una dal secondo e ritorna alla posizione iniziale. Quando il secondo numero è tutto cancellato, la macchina si ferma perché non esiste una quadrupla che inizia con q_5B.

DOMANDA **Cosa succede se il primo numero viene cancellato prima del secondo?** Cioè se vogliamo calcolare $n_1 - n_2$ essendo $n_1 < n_2$

Poichè la funzione non è definita la MdT non si deve fermare mai.

Macchine di Turing

ATTENZIONE Le MdT presentate prima corrispondono alle funzioni indicate (le calcolano) solo se ricordiamo le convenzioni fatte riguardo alla rappresentazione dei numeri naturali (diverse in ingresso e in uscita).

Se cambiassimo rappresentazione dovremmo cambiare le quadruple opportunamente. Le MdT che calcolano certe cose in una rappresentazione, calcoleranno altre cose in una nuova rappresentazione. Si osservi ancora che la posizione iniziale della testina, in questi esempi, è sempre stata sul primo simbolo non blank. Anche questa è una convenzione. Successivamente ne useremo anche altre.

Rappresentazioni diverse delle MdT

Possiamo avere rappresentazioni diverse dalla rappresentazione standard della MdT mediante quadruple (che abbiamo usato come definitoria).
Una è quella di "**tabella della macchina**". Un'altra è quella di "**diagramma di flusso**".

Mostreremo brevemente adesso, come esercizio, come si passa da una rappresentazione all'altra nel caso di un esempio semplice:

Una MdT che scrive tre simboli su un nastro inizialmente bianco e che si ferma esaminando il quadrato che contiene il simbolo più a sinistra.

Macchine di Turing

Che operazioni elementari possiamo far compiere alla macchina per ottenere il risultato voluto?

- Scrivere un simbolo 1 sul quadrato che sta esaminando.
- Spostarsi a sinistra di un quadrato.
- Scrivere un 1 anche su questo quadrato.
- Spostarsi ancora a sinistra di un quadrato
- Scrivere un 1 anche su questo quadrato.
- Fermarsi.

N. B.: OVVIAMENTE AVREMMO POTUTO USARE ANCHE ALTRE STRATEGIE

Macchine di Turing

Ricordiamo che la MdT non ha bisogno di un'istruzione specifica di fermata; si ferma quando non ha istruzioni da eseguire. Possiamo eseguire queste azioni mediante le quadruple seguenti:

$q_1\ S_0\ S_1\ q_1$ $\qquad$ $q_1\ S_1\ \mathrm{L}\ q_2$,

$q_2\ S_0\ S_1\ q_2$ $\qquad$ $q_2\ S_1\ \mathrm{L}\ q_3$,

$q_3\ S_0\ S_1\ q_3$

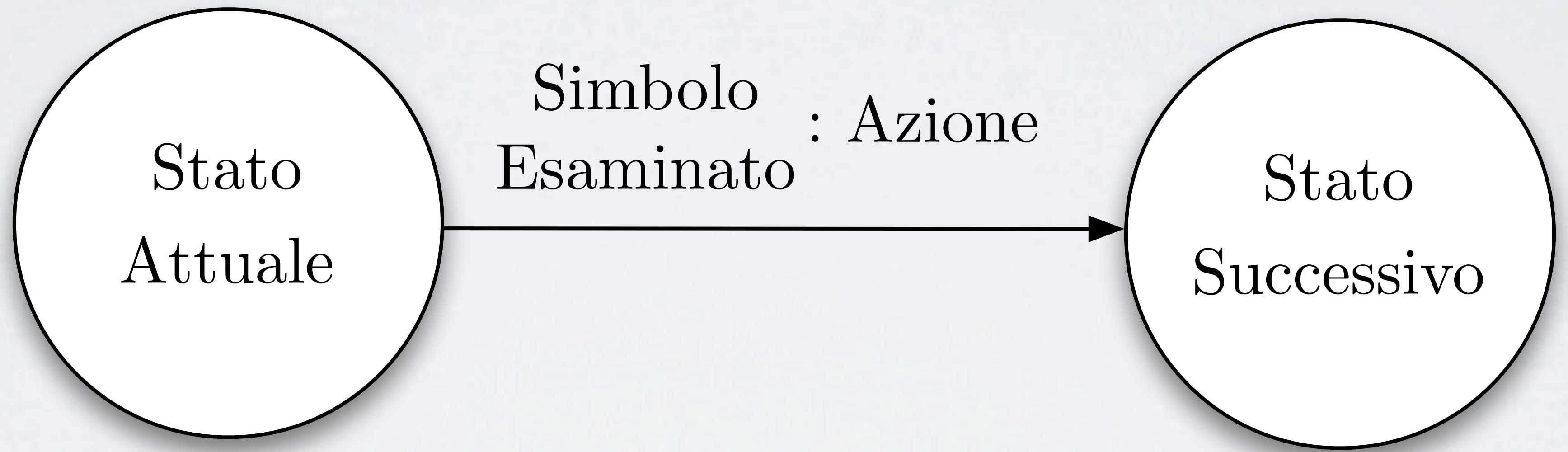
La rappresentazione mediante tabella di queste istruzioni si ottiene ponendo lungo un asse i simboli che la macchina può scrivere e lungo l'altro asse gli stati interni della macchina. L'elemento che si trova nella casella (i, j) ci dice cosa deve fare la macchina quando sta leggendo il simbolo i-esimo trovandosi nello stato j-esimo.

Macchine di Turing

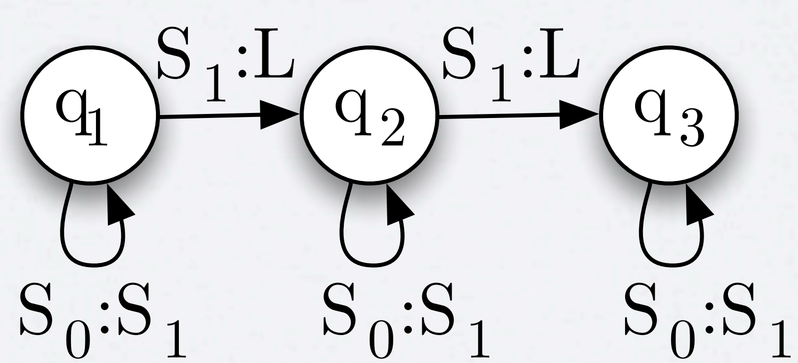
	SIMBOLO ESAMINATO		
	S_0	S_1	
q_1	S_1q_1	Lq_2	$q_1S_0S_1q_1,$ $q_1S_1Lq_2,$
q_2	S_1q_2	Lq_3	$q_2S_0S_1q_2,$ $q_2S_1Lq_3,$
q_3	S_1q_3		$q_3S_0S_1q_3$
TABELLA			INSIEME DI QUADRUPLE

Macchine di Turing

Il diagramma di flusso sarà formato da un insieme di nodi connessi da frecce che possiamo costruire nel modo che segue, a partire dalle quadruple.



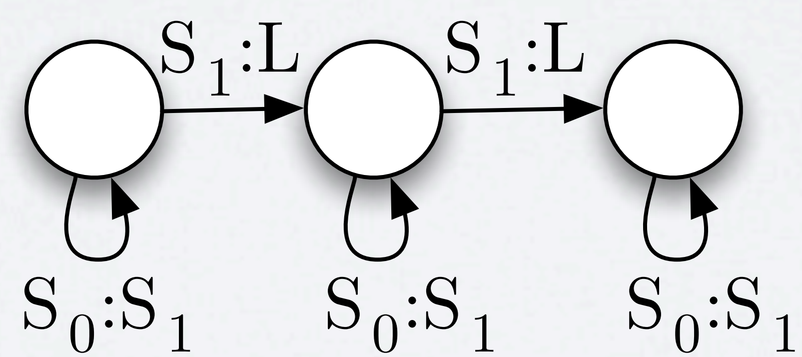
Il diagramma di flusso della MdT precedente è quindi dato da:



Macchine di Turing

Qual è il vantaggio della rappresentazione mediante diagrammi di flusso? Possiamo seguire il modo di procedere della MdT in modo più evidente in una rappresentazione più compatta.

E questo possiamo farlo senza neanche ricordarci il "nome" di tutti gli stati. Ad esempio, il diagramma di flusso della MdT precedente senza i nomi degli stati ci permette lo stesso di capire cosa fa la macchina.



Macchine di Turing

Una MdT che fa operazioni di scrittura di simboli sul nastro senza interpretare questi "numericamente", è stato introdotto prima come ausilio per introdurre in modo didatticamente semplice diversi modi nei quali possiamo rappresentare le MdT.

Ma adesso, senza una rilevanza apparente per problemi di "calcolabilità numerica", chiediamoci quanto facilmente possiamo progettare MdT che fanno "giochini" vari.

(E CHIEDIAMOCI ANCHE A COSA POSSONO SERVIRE QUESTI GIOCHINI)