PROBLEMI DELLA PAROLA INSOLUBILI

Definizione

Il problema della parola per un processo di semi-Thue Π è il problema di determinare, per ogni coppia data di parole u e v sull'alfabeto di Π, se $u \overset{*}{\underset{\Pi}{\Rightarrow}} v$.

PROPOSIZIONE

Esiste una Macchina di Turing $\mathcal{M}$ tale che il problema della parola è insolubile per entrambi i processi di semi-Thue $\Sigma(\mathcal{M})$ e $\Omega(\mathcal{M})$.

Dimostrazione

Sappiamo già che esiste una M.d.T. $\mathcal{M}$ che accetta un linguaggio non ricorsivo.

Ammettiamo che il problema della parola per $\Sigma(\mathcal{M})$, dove $\mathcal{M}$ è proprio questa M.d.T. sia solubile.

Allora esisterebbe un algoritmo per determinare se, date due parole v e w, $v \overset{*}{\underset{\Sigma(\mathcal{M})}{\Rightarrow}} w$.

In base ad una proposizione precedente potremmo usare quest'algoritmo per sapere se $\mathcal{M}$ accetta una certa stringa u, controllando se

$$h q_1 s_0 u h \overset{*}{\underset{\Sigma(\mathcal{M})}{\Rightarrow}} h q_0 h$$

Avremmo allora un algoritmo per determinare, data una parola arbitraria u, se M accetta o meno u.
Questo va contro l'ipotesi che il linguaggio accettato da M non è un insieme ricorsivo.
Quindi un algoritmo come quello ipotizzato non può esistere ed abbiamo così mostrato che il problema della parola per $\Sigma(M)$ (per certe MdT) non è solubile.

Possiamo immediatamente concludere che la stessa cosa vale per $\Omega(M)$ perché se possedessimo un algoritmo per risolvere il problema della parola per $\Omega(M)$ allora potremmo usarlo anche per risolvere il problema della parola per $\Sigma(M)$ poiché, per come sono collegate le regole di riscrittura di Σ e di Ω, si ha che:

$$v \underset{\Sigma(M)}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w \quad \text{se e solo se} \quad w \underset{\Omega(M)}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v .$$

Definizione

Un processo di semi-Thue è detto <u>PROCESSO DI THUE</u> se contiene la produzione <u>inversa</u> di ogni produzione presente in esso.

Notazioni

- si scriverà $g \leftrightarrow \bar{g}$ per indicare che si ha sia $g \rightarrow \bar{g}$ sia $\bar{g} \rightarrow g$.

- Data una Macchina di Turing $\mathcal{M}$ si scriverà

$$\Theta(\mathcal{M}) = \Sigma(\mathcal{M}) \cup \Omega(\mathcal{M}).$$

$\Theta(\mathcal{M})$ è quindi sempre un <u>processo di Thue</u>

Proposizione (chiamata "Lemma di Post").

Sia M una macchina di Turing deterministica.
Sia u una parola nell'alfabeto di M tale che:

$$h q_1 s_0 u h \xRightarrow[\Theta(M)]{*} h q_0 h$$

allora:

$$h q_1 s_0 u h \xRightarrow[\Sigma(M)]{*} h q_0 h .$$

Dimostrazione.

La sequenza

$$h q_1 s_0 u h = w_1 , w_2 , \dots , w_e = h q_0 h$$

sia una derivazione in $\Theta(M)$.
Poiché w_1 è una parola di Post e ciascuna regola di riscrittura trasforma parole di Post in parole di Post siamo sicuri che tutti gli elementi della derivazione sono parole di Post.
Ciò che adesso ci proponiamo di fare è di eliminare da questa derivazione l'uso di regole di produzione che appartengono a $\Omega(M)$.

Supponiamo che l'ultima volta che è stata usata una regola di riscrittura appartenente ad $\Omega(M)$ sia nel passaggio da w_i a w_{i+1}.

Detto altrimenti ciò vuol dire che assumiamo che

$$w_i \underset{\Omega(M)}{\Longrightarrow} w_{i+1} \quad \text{e} \quad \boxed{w_{i+1} \underset{\Sigma(M)}{\Longrightarrow} w_{i+2}} \overset{*}{\underset{\Sigma(M)}{\Longrightarrow}} w_e = hq_0h$$

Poiché $\Omega(M)$ è formato da regole di riscrittura inverse di quelle di $\Sigma(M)$, se è $w_i \underset{\Omega(M)}{\Longrightarrow} w_{i+1}$

sarà anche $\boxed{w_{i+1} \underset{\Sigma(M)}{\Longrightarrow} w_i}$

In $\Sigma(M)$ sono quindi presenti le due regole di riscrittura incorniciate che si applicano alla stessa parola w_{i+1} (che è una parola di Post).

Poiché, per ipotesi, M è deterministica applicando una proposizione precedente otteniamo che deve essere $w_{i+2} = w_i$.

Il passaggio da w_i a w_{i+1} ed a $w_{i+2} = w_i$ può quindi essere eliminato.

Il ragionamento può essere ripetuto per tutti i passaggi che fanno uso di regole di produzione di $\Omega(M)$ e quindi possiamo concludere che la sequenza $w_1 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow w_e$ nella quale sono state soppresse le derivazioni del tipo $w_i \underset{\Omega}{\Longrightarrow} w_{i+1} \underset{\Sigma}{\Longrightarrow} w_{i+2}$, rappresenta una derivazione che fa uso solo di regole di riscrittura di $\Sigma(M)$.

PROPOSIZIONE (Post-Markov)

Se la macchina di Turing deterministica $\mathcal{M}$ accetta un insieme non ricorsivo, allora il problema della parola del processo di Thue $\Theta(\mathcal{M})$ è insolubile.

Dimostrazione

Sia u una parola sull'alfabeto di $\mathcal{M}$.

Sappiamo che $\mathcal{M}$ accetta u se e solo se

$$h q_1 s_0 u h \underset{\Sigma(\mathcal{M})}{\overset{*}{\Longrightarrow}} h q_0 h$$

ma, in base al lemma di Post quest'ultima derivazione è ~~valida~~ se e solo se

$$h q_1 s_0 u h \underset{\Theta(\mathcal{M})}{\overset{*}{\Longrightarrow}} h q_0 h$$

Potremmo quindi usare un algoritmo che risolve il problema della parola per $\Theta(\mathcal{M})$ per decidere se $\mathcal{M}$ accetta o meno u, il che è impossibile.

Proposizione

Esiste un processo di semi-Thue su un alfabeto di due lettere $\{a, b\}$ il cui problema della parola è insolubile.
Si ha inoltre che, per ciascuna regola di riscrittura di questo processo, $g, h \neq 0$.

Dimostrazione.

Sia Π un processo di semi-Thue, con problema della parola insolubile, su un alfabeto di cardinalità n, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Siano $g_i \to \bar{g}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$

le regole di riscrittura di Π.

Poiché già sappiamo che i processi $\Sigma(\mathcal{M})$ associati ad una M.d.T. $\mathcal{M}$ sono tali che tutte le regole di riscrittura $g_i \to \bar{g}_i$ hanno $\boxed{g_i \neq 0 \text{ e } \bar{g}_i \neq 0}$ ed esistono processi $\Sigma(\mathcal{M})$ il cui problema della parola è insolubile, possiamo assumere che il nostro processo Π soddisfi tale condizione.

Ciò che adesso vogliamo fare è costruire un processo di semi-Thue Π', su un alfabeto di due soli simboli, "associato" a Π.

Sia adesso l'alfabeto $\{a, b\}$ e consideriamo, in corrispondenza di ogni $a_j \in A = \{a_1, \dots, a_n\}$ la stringa $\boxed{a'_j = b\, a^{[j]}\, b} \in \{a, b\}^*$, $j = 1, \dots, n$.

In corrispondenza di ogni parola $w \in A^*$, $w \neq 0$,

$$w = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}$$

costruiamo la parola $w' \in \{a, b\}^*$,

$$w' = a'_{j_1} a'_{j_2} \dots a'_{j_k}$$

ed inoltre poniamo in corrispondenza della stringa vuota $0 \in A^*$, la stringa vuota $0' \in \{a, b\}^*$

Sia adesso il processo di semi-Thue Π' su $\{a, b\}$ le cui regole di riscrittura sono:

$$g'_i \to \bar{g}'_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m .$$

Ciò che adesso vogliamo mostrare è che

$$(\square) \qquad u \underset{\Pi}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v \quad \text{se e solo se} \quad u' \underset{\Pi'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v'$$

Infatti, in questo caso, un algoritmo per risolvere il problema della parola per Π' risolverebbe il problema della parola per Π, contro l'ipotesi fatta su Π.

Prima di procedere alla dimostrazione di ($\square$) osserviamo che valgono le due proprietà seguenti:

P1) Se $u \underset{\Pi}{\Rightarrow} v$ allora $u' \underset{\Pi'}{\Rightarrow} v'$

Basta osservare che, in base alle definizioni date, si ha che $u = r g_i s$ e $v = r \bar{g}_i s$, ma allora $u' = r' g_i' s'$ e $v' = r' \bar{g}_i' s'$ e questo vuol dire che $u' \underset{\Pi'}{\Rightarrow} v'$.

P2) Se $u' \underset{\Pi'}{\Rightarrow} w$ allora per qualche $v \in A^*$ si ha che $w = v'$ e $u \underset{\Pi}{\Rightarrow} v$

Verifica formale

$u' \underset{\Pi'}{\Rightarrow} w$ vuol dire che $u' = p g_i' q$, $w = p \bar{g}_i' q$.
Per le ipotesi fatte g_i non può essere la parola vuota, quindi g_i', essendo associata a g_i secondo le regole date, comincerà e terminerà con la lettera b.
Sia p sia q possono o essere la parola vuota oppure iniziare e terminare per b, perchè u' è associata ad u e quindi anch'essa costruita secondo le nostre regole.
Quindi p e q saranno parole associate a parole r ed s di A^* : $p = r'$, $q = s'$. Avremo $u = r g_i s$.
La parola cercata è, allora, $v = r \bar{g}_i s$; si ha, infatti, che: $w = v'$ e $u \underset{\Pi}{\Rightarrow} v$

PARAFRASI DELLA PROPRIETÀ P2

Se una parola w è immediatamente ottenibile nel sistema di Semi-Thue su $\{a, b\}$ da una parola u', che è associata ad una parola $u \in A^*$, allora w è sicuramente la parola associata ad una parola di A^* che è quella ottenibile, nel sistema di Semi-Thue su A, dalla parola associata ad u.

COMMENTO

Nel definire il sistema di semi Thue Π' potremmo pensare di avere costruito qualcosa che è sì legato a Π ma non strettamente; la proprietà P_2 ci mostra che se partiamo da parole associate a quelle di A^* allora non facciamo altro che "simulare" il comportamento del sistema Π.

Mostriamo adesso che

$$u \underset{\Pi}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v \quad \text{se e solo se} \quad u' \underset{\Pi'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v'$$

Dimostrazione

$\Rightarrow$) Se $u \underset{\Pi}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v$ allora avremo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tali che

$$u = u_1 \underset{\Pi}{\Longrightarrow} u_2 \underset{\Pi}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\Pi}{\Longrightarrow} u_n = v.$$

Per la proprietà 1 si avrà che

$$u' = u'_1 \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} u'_2 \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} \cdots \Longrightarrow u'_n = v', \text{ cioè } u' \underset{\Pi'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v'$$

$\Leftarrow$) Viceversa, se $u' \underset{\Pi'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v'$, cioè se

$$u' = w_1 \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} w_2 \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} w_n = v'$$

per la (prima parte della) proprietà 2, esisterà in corrispondenza ad ogni w_i una parola $u_i \in A^*$ tale che $w_i = u'_i$, per cui si avrà

$$u' = u'_1 \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} u'_2 \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\Pi'}{\Longrightarrow} u'_n = v'.$$

In base alla (seconda parte della) proprietà 2, la derivazione precedente ci dice che è anche:

$$u = u_1 \underset{\Pi}{\Longrightarrow} u_2 \underset{\Pi}{\Longrightarrow} \cdots \underset{\Pi}{\Longrightarrow} u_n = v,$$

cioè che $u \underset{\Pi}{\overset{*}{\Longrightarrow}} v$.

Osserviamo ancora che le regole per costruire Π' a partire dal processo di semi-Thue Π sono tali che se Π è in realtà un processo di Thue allora anche Π' sarà un processo di Thue.

Tenendo conto che possiamo partire da un processo del tipo $\Theta(M)$, certamente esistente, possiamo concludere che:

TEOREMA

Esiste un processo di Thue su un alfabeto di due lettere il cui problema della parola è insolubile. Tutte le produzioni $g \to h$ di tale processo sono tali che $g, h \neq 0$.