Il prossimo risultato è più importante di quanto la semplicità della sua dimostrazione possa far pensare.
Tale semplicità è dovuta all'uso combinato di teoria della ricorsività e teoria delle grammatiche. Una dimostrazione puramente "ricorsiva" sarebbe stata più complessa.

TEOREMA
Sia U un insieme r.e. di numeri. Allora esiste un predicato ricorsivo primitivo $R(x,t)$ tale che

$$U = \{ x \mid \exists t \; R(x,t) \}$$

Dimostrazione

Guardiamo ad U come ad un linguaggio r.e. su $\{s_1\}$
Sappiamo che U è r.e. se e solo se esiste una gramm. Γ tale che $U = L(\Gamma)$.
Deve pertanto esistere una grammatica Γ con il singolo simbolo terminale s_1 che genera U.
L'alfabeto di Γ sia $s_1, V_1, \dots, V_k$.
La stringa che rappresenta x in base 1, $s_1^{[x]}$, rappresenta, in base $k+1$, il numero $f(x)$ definito da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sum_{i=0}^{x-1} (k+1)^i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$f(x)$ è quindi ricorsiva primitiva.
Ora $x \in U$ se esiste una sua deriv. in Γ, cioè:

$$x \in U \iff (\exists y)\, \mathrm{DERIV}(f(x), y) \qquad R'(x,y)$$

suo "nome" numerico in Γ

Ma allora il teorema è dimostrato perché $\mathrm{DERIV}(f, \ )$ come composizione di "oggetti" ricorsivi primitivi è anch'esso ricorsivo primitivo.

TEOREMA.

Sia S un insieme non vuoto r.e. Allora esiste una funzione ricorsiva primitiva $f(x)$ tale che:

$$S = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{f(0), f(1), \dots\}$$

Cioè, S è il codominio di f.

Dimostrazione.

Per il teorema precedente $S = \{x \mid \exists t\ R(x,t)\}$ $(*)$

dove R è un predicato ricorsivo primitivo.

Sia adesso x_0 un elemento fissato di S, per esempio, il più piccolo.

Poniamo

$$f(u) = \begin{cases} \ell(u) & \text{se } R(\ell(u), r(u)) \\ x_0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione f è ricorsiva primitiva.

- Mostriamo adesso che ogni valore di $f(u)$ è in S.
  - x_0 appartiene ad S per definizione.
  - il valore $\ell(u)$ viene assunto da f quando esiste un t, in questo caso $r(u)$, che si trova nella relazione R con $\ell(u)$, ma in questo caso, per la relazione $(*)$, $\ell(u) \in S$.
- Mostriamo adesso l'inverso. Se $x \in S$, allora $R(x, t_0)$ è vero per qualche t_0.

  Calcoliamo $f(\langle x, t_0\rangle)$, dove $\langle x, t_0\rangle$ è la solita codifica

  Si ha: $f(\langle x, t_0\rangle) = \ell(\langle x, t_0\rangle) = x$

  Abbiamo allora effettivamente che se un elemento x appartiene ad S allora è il valore assunto da f quando è calcolata in $\langle x, t_0\rangle$. Ed il teorema è dimostrato.

TEOREMA

Sia $f(x)$ una funzione parzialmente calcolabile e sia $S = \{ f(x) \mid f(x)\downarrow \}$, allora S è r.e.
(Cioè se S è il codominio di una funzione parz. calcolabile allora S è ricorsiv. enumerabile).

Dimostrazione.

Poniamo:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ \text{non definita} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $S = \{ x \mid g(x) \text{ è definita} \}$ $(*)$

Ma la $(*)$, nel caso in cui la g è parzialmente calcolabile è proprio la definizione di insieme r.e.

Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente mostrare che g è parzialmente calcolabile.

Sia, allora, P un programma che calcola f (esistente per l'ipotesi che f è parz. calcolabile) e sia $\#(P) = p$.

g è calcolata dal programma che segue:

```
[A] IF ~STP^(1)(Z, p, T) GOTO B
        V ← f(Z)
        IF V = X  GOTO E
[B] Z ← Z + 1
        IF Z ≤ T  GOTO A
        T ← T + 1
        Z ← 0
        GOTO A
```

- L'istruzione N° 1 controlla se il programma N° p (cioè quello che calcola f) si ferma dopo non più di T passi sulla variabile Z.

- Se non si ferma allora viene rinviato all'istruzione 4 che aumenta di una unità la variabile Z e nel caso in cui Z è minore o eguale a T rinvia ad A

- Se Z > T allora viene aumentato il valore di T di una unità, riazzerata la variabile Z ed il processo ricomincia.

È CHIARO CHE LO SCOPO CHE SI PREFIGGE TUTTO QUESTO MARCHINGEGNO È SOLO QUELLO DI FARE ATTIVARE LA MACRO $V \leftarrow f(Z)$ SOLO QUANDO LA $f(Z)$ È DEFINITA.

A QUESTO PUNTO IL NUCLEO DEL PROGRAMMA

$V \leftarrow f(Z)$
IF V=X GOTO E

SEMPLICEMENTE CONFRONTA IL VALORE $f(Z)$ CON QUELLO DI X E SE I VALORI SONO EGUALI IL PROGRAMMA SI FERMA.
LA VARIABILE DI USCITA Y SU CUI NON SI È INTERVENUTI DARÀ IL VALORE 0.

I due teoremi precedenti ci permettono di mostrare l'equivalenza tra gli enunciati che seguono:

L'INSIEME S È RICORSIVAMENTE ENUMERABILE

$\Downarrow$ per il penultimo teorema dimostrato

S È IL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE RICORSIVA PRIMITIVA

$\Downarrow$ ovvia

S È IL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE RICORSIVA

$\Downarrow$ ovvia

S È IL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE RICORSIVA PARZIALE

$\Downarrow$ per l'ultimo teorema dimostrato.

S È RICORSIVAMENTE ENUMERABILE

Gli enunciati 2, 3, 4 sono quindi caratterizzazioni degli insiemi ricorsivamente enumerabili.

Presentiamo ancora una proposizione la cui dimostrazione è immediata e che useremo successivamente.

Proposizione

Sia $g(x)$ una funzione parzialmente calcolabile e sia $S = \{ \langle x, y \rangle \mid y = g(x) \}$ allora S è r.e.

Dimostrazione

S non è altro che l'insieme dei valori assunti dalla funzione di codifica "coppia" $\langle , \rangle$ calcolata su $(x, g(x))$.
Chiamiamo f tale funzione : $f(x) = \langle x, g(x) \rangle$

Abbiamo allora che

$$S = \{ f(x) \mid x \in N \}$$

con f parzialmente calcolabile (perché lo è sia $\langle , \rangle$ che g).
In base ad uno dei teoremi precedenti S è, allora, ricorsivamente enumerabile.

TEOREMA (della forma normale di Kleene per funz. di una var.)
Sia f una funzione parzialmente calcolabile di una variabile, allora esiste un predicato ricorsivo primitivo $R(x, y)$ tale che:

$$f(x) = l(\min_y R(x,y))$$

Dimostrazione

Sia
$$S = \{\langle x, y\rangle \mid y = f(x)\} \qquad (*)$$

Sappiamo già che se $f(x)$ è parzialmente calcolabile allora un insieme S della forma (*) è ricorsivamente enumerabile.
Ancora, sappiamo che un insieme r.e. si può sempre esprimere come:

$$S = \{u \mid \exists t\ Q(u,t)\}$$

con Q predicato ricorsivo primitivo.

Nel nostro caso si ha quindi che:

$$y = f(x) \iff \langle x, y\rangle \in S \iff (\exists t)\, Q(\langle x,y\rangle, t).$$

Vogliamo adesso mostrare che:

$$f(x) = l\left(\min_y Q(\langle x, l(y)\rangle, r(y))\right)$$

Supponiamo che $\min_y Q(\langle x, \ell(y)\rangle, r(y))$ sia definito e sia:

$$y_0 = \min_y Q(\langle x, \ell(y)\rangle, r(y))$$

ponendo $v = \ell(y_0)$

$t = r(y_0)$

possiamo scrivere

$Q(\langle x, v\rangle, t)$

Ricordiamo che, per definizione,

(*) $$y = f(x) \iff \exists t\ Q(\langle x, y\rangle, t)$$

nel nostro caso si ha che $\exists t$, $t = r(y_0)$ tale che $Q(\langle x, y\rangle, t)$ con $y = v = \ell(y_0)$, quindi si ha che:

$$f(x) = \ell(y_0) = \ell\left(\min_y Q(\langle x, \ell(y)\rangle, r(y))\right)$$

Supponiamo adesso che

$\min_y Q(\langle x, \ell(y)\rangle, r(y))$ non sia definita.

Questo vuol dire che $Q(\langle x, v\rangle, t)$ non è mai verificata per nessun v, t ed allora non esiste nessun valore v tale che $f(x) = v$ e quindi $f(x)$ non è definito (si usa ancora una volta la definizione (*)).

Abbiamo così dimostrato il teorema –

Vogliamo adesso estendere una rappresentazione come quella precedente a funzioni parzialmente calcolabili di n variabili.

È FACILE PREVEDERE CHE IL MECCANISMO CHE USEREMO SARÀ UN TRUCCO DI CODIFICA CHE CI PERMETTERÀ DI LEGGERE LA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI COME FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE. DOPO DI CHE POTREMO APPLICARE IMMEDIATAMENTE IL TEOREMA PRECEDENTE.

TEOREMA (DELLA FORMA NORMALE DI KLEENE)

Sia $f(x_1,\dots,x_n)$ una funzione parzialmente calcolabile di n variabili.
Allora esiste un predicato ricorsivo primitivo $R(x_1,\dots,x_n,y)$, di $n+1$ variabili tale che:

$$f(x_1,\dots,x_n) = l\left(\min_y R(x_1,\dots,x_n,y)\right)$$

Dimostrazione.

Poniamo $x = [x_1,\dots,x_n]$ (codifica di Gödel)

e $g(x) = f\left((x)_1,\dots,(x)_n\right)$

g è, ovviamente, parzialmente calcolabile per cui si ha che:

$$g(x) = l\left(\min_y Q(x,y)\right)$$ (applicazione del teorema precedente)

Ma la relazione precedente si può scrivere come:

$$f(x_1,\dots,x_n) = g([x_1,\dots,x_n]) = l\left(\min_y Q([x_1,\dots,x_n],y)\right)$$

ed il teorema è dimostrato.

Possiamo adesso trarre alcune conclusioni:

1. LA DIMOSTRAZIONE DELL'EQUIVALENZA TRA IL LINGUAGGIO $\mathcal{S}$ ED IL LINGUAGGIO W È COSÌ COMPLETATA
(e, di conseguenza, quella tra W e tutte le altre versioni della calcolabilità equivalenti ad $\mathcal{S}$).

2. È ANCHE DIMOSTRATA L'EQUIVALENZA TRA LE FUNZIONI μ-ricorsive E LE FUNZIONI CALCOLABILI IN $\mathcal{S}$.

Infatti, dato il teorema della forma normale, possiamo concludere che una funzione parzialmente calcolabile può essere ottenuta dalle funzioni iniziali mediante un numero finito di applicazioni delle operazioni di composizione, ricorsione e minimalizzazione (quest'ultima, a rigore, basta una sola volta)
(Avevamo già mostrato, a suo tempo, la calcolabilità delle funzioni ricorsive primitive e dell'operatore di minimalizzazione -)

Ricordiamo qui brevemente come si mostra la calcolabilità dell'operatore di minimalizzazione:

Sia $P(x_1, \dots, x_n, y)$ un predicato calcolabile

Allora $g(x_1, \dots, x_n) = \min_y P(x_1, \dots, x_n, y)$

è una funzione parzialmente calcolabile.

g, infatti, è calcolata dal programma:

```
[A] IF P(X1,...,Xn,Y) GOTO E
    Y ← Y+1
    GOTO A
```

Funzioni μ-ricorsive:

$\left.\begin{array}{l}\text{- Funzioni iniziali} \\ \text{chiusura per} \\ \text{- composizione} \\ \text{- ricorsione}\end{array}\right\}$ Ricorsive prim.

- minimalizzazione <u>NON LIMITATA</u>

Il Teorema della forma normale di Kleene ci permette di dire immediatamente che le funzioni calcolabili sono μ-ricorsive.

Il viceversa è conseguenza della calcolabilità delle funzioni iniziali e delle operazioni di chiusura.

QUINDI

La classe delle funzioni μ-ricorsive parziali coincide con la classe delle funzioni parzialmente calcolabili in $\mathcal{S}$.